

# EFFET D'UNE PERTURBATION NON LINÉAIRE SUR L'OBTENTION D'UNE ESTIMATION UNIFORME.

SAMY SKANDER BAHOURA

ABSTRACT. We consider the equation  $\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)} + Wu^{n/(n-2)}$  and we give some minimal conditions on  $\nabla V$  and  $\nabla W$  to have an uniform estimate for their solutions.

If we replace  $Wu^{n/(n-2)}$  by  $Wu$  in the previous equation, we have an uniform estimate for radial solutions.

## 1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS.

Nous notons  $\Delta = -\sum \partial_{ii}$  le laplacien géométrique sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ .

Considérons sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , l'équation suivante:

$$\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)} + Wu^{n/(n-2)} \quad (E)$$

où  $V$  et  $W$  sont deux fonctions régulières.

On suppose que:

$$0 < a \leq V(x) \leq b, \quad \|\nabla V\|_{L^\infty} \leq A \quad (C_1)$$

$$0 < c \leq W(x) \leq d, \quad \|\nabla W\|_{L^\infty} \leq B \quad (C_2)$$

**Problème:** Quelles conditions minimales peut-on imposer à  $\nabla V$  et  $\nabla W$  pour avoir une estimation uniforme du type  $\sup \times \inf$  pour les solutions de l'équation (E) ?

Notons que lorsque  $W \equiv 0$ , l'équation (E) est la célèbre équation de la courbure scalaire prescrite sur un ouvert de l'espace euclidien de dimension  $n \geq 3$ .

Dans ce cas, il existe beaucoup de résultats concernant les solutions de cette équation, voir par exemple, [B], [C-L 1].

Lorsque  $\Omega = \mathbb{S}_n$  avec l'équation correspondante (courbure scalaire), YY. Li donne des conditions de platitude suffisante pour avoir une majoration de l'énergie ainsi que l'existence de points dit isolés simples, voir [L1], [L2].

Dans [C-L 2] Chen et Lin mettent en évidence un contre exemple confirmant l'importance des hypothèses de Li.

Notons que dans [C-L 1], il existe des résultats concernant les inégalités de Harnack du type  $\sup \times \inf$  avec des conditions de plitudes similaires à celles de Li pour une equation du type:

$$\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)} + g(u)$$

avec  $g$  une fonction régulière équivalente  $t^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2}$ .

Notons que dans ce travail, aucune borne a priori sur l'énergie n'est imposée. On utilise la technique blow-up et de déplacement de plan dite "Moving-Plane" inventée par Alexandrov et développée par Gidas-Ni-Nirenberg, voir [G-N-N].

Notons que la méthode "moving-Plane" est souvent utilisée pour déterminer si les solutions d'une EDP sont symétriques ou dans la recherche de forme explicite de certaines solutions d'équations aux dérivées partielles.

Ici, nous avons:

**Théorème 1.** *Pour tout  $a, b, c, d > 0$ , pour toutes suites  $(A_i), (B_i)$  telles que  $A_i \rightarrow 0$  et  $B_i \rightarrow 0$  et pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe une constante positive  $c = c[a, b, c, d, (A_i), (B_i), K, \Omega, n]$  telle que:*

$$\sup_K u_i \times \inf_{\Omega} u_i \leq c, \quad (\text{pour } i \text{ assez grand})$$

*pour toute suite  $(u_i)_i$  solutions de  $(E)$  relativement à  $(V_i)$  et  $(W_i)$  vérifiant les conditions  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .*

On se place sur la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  ( $\Omega = B_1(0)$ ) et on s'occupe de l'équation suivante:

$$\Delta u_i = V_i u_i^{(n+2)/(n-2)} + W_i u_i \quad (E')$$

On suppose que  $u_i$  et  $V_i$  sont radiales:

$$0 < a \leq V_i(r) \leq b \text{ et } |V_i(r) - V_i(r')| \leq A_i |r^2 - r'^2| \text{ avec } A_i \rightarrow 0 \quad (C_3)$$

$$0 < c \leq W_i(r) \leq d \text{ et } |W'_i(r)| \leq B_i \text{ avec } B_i \rightarrow 0 \quad (C_4)$$

Nous avons:

**Théorème 2.** *Pour tout  $a, b, c, d > 0$ , pour toutes suites  $(A_i)$  et  $(B_i)$ , il existe une constante positive  $c = c[a, b, c, d, (A_i), (B_i), n]$  telle que:*

$$u_i(0) \times u_i(1) \leq c \quad (\text{pour } i \text{ assez grand})$$

*pour toute suite  $(u_i)$  solution de  $(E')$  relativement à  $(V_i)$  et  $(W_i)$  vérifiant  $(C_3)$  et  $(C_4)$ .*

## 2. PREUVES DES THÉORÈMES.

### Preuve du Théorème 1

Soit  $x_0$  un point de  $\Omega$  et  $(u_i)_i$  une suite de fonctions sur  $\Omega$  telles que,

$$\Delta u_i = V_i u_i^{(n+2)/(n-2)} + W_i u_i^{n/(n-2)}, \quad u_i > 0$$

On raisonne par l'absurde, en supposant que  $\sup \times \inf$  n'est pas borné.

On suppose que:

$\forall c, R > 0 \exists (u_{c,R,j})_j$  solution de  $(E)$  telle que:

$$R^{n-2} \sup_{B(x_0,R)} u_{c,R,j} \times \inf_{\Omega} u_{c,R,j} \geq c, \quad (H)$$

**Proposition** (*blow-up*):

Il existe une suite de points  $(y_i)_i$ ,  $y_i \rightarrow x_0$  et deux suites de réels positifs  $(l_i)_i, (L_i)_i$ ,  $l_i \rightarrow 0$ ,  $L_i \rightarrow +\infty$ , telles qu'en posant  $v_i(z) = \frac{[y_i + z/[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}]}{u_i(y_i)}$ , on ait:

$$0 < v_i(z) \leq \beta_i \leq 2^{(n-2)/2}, \quad \beta_i \rightarrow 1.$$

$$v_i(z) \rightarrow \left( \frac{1}{1 + |z|^2} \right)^{(n-2)/2}, \quad \text{la convergence est uniforme sur tout compact de } \mathbb{R}^n.$$

$$l_i^{(n-2)/2} u_i(y_i) \times \inf_{\Omega} u_i \rightarrow +\infty$$

**Preuve de la proposition:**

On utilise (H), on peut supposer qu'il existe une suite  $R_i > 0$ ,  $R_i \rightarrow 0$  et  $c_i \rightarrow +\infty$ , telles que,

$$R_i^{(n-2)} \left( \sup_{B(x_0, R_i)} u_i \right)^s \inf_{\Omega} u_i \geq c_i \rightarrow +\infty,$$

Soit,  $x_i \in B(x_0, R_i)$ , tel que  $\sup_{B(x_0, R_i)} u_i = u_i(x_i)$  et  $s_i(x) = [R_i - |x - x_i|]^{(n-2)/2} u_i(x)$ ,  $x \in B(x_i, R_i)$ . Alors,  $x_i \rightarrow x_0$ .

On a,

$$\max_{B(x_i, R_i)} s_i(x) = s_i(y_i) \geq s_i(x_i) = R_i^{(n-2)/2} u_i(x_i) \geq \sqrt{c_i} \rightarrow +\infty.$$

On pose :

$$l_i = R_i - |x - x_i|, \quad \bar{u}_i(y) = u_i(y_i + y), \quad v_i(z) = \frac{u_i(y_i + z/[u_i(y_i)]^{2/(n-2)})}{u_i(y_i)}.$$

Il est clair que,  $y_i \rightarrow x_0$ . On obtient aussi:

$$L_i = \frac{l_i}{(c_i)^{1/2(n-2)}} [u_i(y_i)]^{2/(n-2)} = \frac{[s_i(y_i)]^{2/(n-2)}}{c_i^{1/2(n-2)}} \geq \frac{c_i^{1/(n-2)}}{c_i^{1/2(n-2)}} = c_i^{1/2(n-2)} \rightarrow +\infty.$$

Si  $|z| \leq L_i$ , alors  $y = [y_i + z/[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}] \in B(0, \delta_i l_i)$  avec  $\delta_i = \frac{1}{(c_i)^{1/2(n-2)}}$  et  $|y - y_i| < R_i - |y_i - x_i|$ , d'où,  $|y - x_i| < R_i$  et donc,  $s_i(y) \leq s_i(y_i)$ , ce qui revient à écrire,

$$u_i(y)[R_i - |y - y_i|]^{(n-2)/2} \leq u_i(y_i)(l_i)^{(n-2)/2}.$$

Comme,  $|y - y_i| \leq \delta_i l_i$ ,  $R_i > l_i$  et  $R_i - |y - y_i| \geq R_i - \delta_i l_i > l_i - \delta_i l_i = l_i(1 - \delta_i)$ , on obtient,

$$0 < v_i(z) = \frac{u_i(y)}{u_i(y_i)} \leq \left[ \frac{l_i}{l_i(1 - \delta_i)} \right]^{(n-2)/2} \leq 2^{(n-2)/2}.$$

On pose alors,  $\beta_i = \left( \frac{1}{1 - \delta_i} \right)^{(n-2)/2}$ , il est clair que  $\beta_i \rightarrow 1$ .

La fonction  $v_i$  vérifie l'équation suivante:

$$\Delta v_i = \tilde{V}_i v_i^{(n+2)/(n-2)} + \frac{\tilde{W}_i}{[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}} v_i^{n/(n-2)}$$

avec,

$$\tilde{V}_i(z) = V_i \left[ y_i + \frac{z}{[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}} \right] \quad \text{et} \quad \tilde{W}_i(z) = W_i \left[ y_i + \frac{z}{[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}} \right].$$

En, utilisant les estimations elliptiques, les théorèmes d'Ascoli et de Ladyzenskaya,  $(v_i)_i$  converge uniformément sur tout compact vers une fonction  $v$  solution sur  $\mathbb{R}^n$  de,

$$\Delta v = V(0)v^{N-1}, \quad v(0) = 1, \quad 0 \leq v \leq 1 \leq 2^{(n-2)/2},$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que  $V(0) = n(n-2)$ .

Par le principe du maximum, on a  $v > 0$  sur  $\mathbb{R}^n$  et un résultat de Caffarelli-Gidas-Spruck (voir [C-G-S]) donne,  $v(z) = \left( \frac{1}{1 + |z|^2} \right)^{(n-2)/2}$ . On obtient les mêmes propriétés de convergence des  $v_i$  que dans un article précédent (voir [B]). La proposition 2 est prouvée.

### **Coordonnées Polaires** (Méthode "Moving-Plane")

Posons pour  $t \in ]-\infty, \log 2]$  et  $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$  :

$$w_i(t, \theta) = e^{(n-2)t/2} u_i(y_i + e^t \theta), \quad \bar{V}_i(t, \theta) = V_i(y_i + e^t \theta) \text{ et } \bar{W}_i(t, \theta) = W_i(y_i + e^t \theta).$$

Par ailleurs, soit  $L$  l'opérateur  $L = \partial_{tt} - \Delta_\sigma - \frac{(n-2)^2}{4}$ , avec  $\Delta_\sigma$  opérateur de Laplace-Baltrami sur  $\mathbb{S}_{n-1}$ .

La fonction  $w_i$  est solution de l'équation suivante :

$$-Lw_i = \bar{V}_i w_i^{N-1} + e^t \times \bar{W}_i w_i^{n/(n-2)}.$$

On pose pour  $\lambda \leq 0$  :

$$t^\lambda = 2\lambda - t \quad w_i^\lambda(t, \theta) = w_i(t^\lambda, \theta), \quad \bar{V}_i^\lambda(t, \theta) = \bar{V}_i(t^\lambda, \theta) \text{ et } \bar{W}_i^\lambda(t, \theta) = \bar{W}_i(t^\lambda, \theta).$$

Alors, pour pouvoir vérifier si le Lemme 2 du Théorème 1 dans [B] reste valable, il suffit de noter que la quantité  $-L(w_i^\lambda - w_i)$  est négative lorsque  $w_i^\lambda - w_i$  l'est. En fait, pour chaque indice  $i$ ,  $\lambda = \xi_i \leq \log \eta_i + 2$ , ( $\eta_i = [u_i(y_i)]^{(-2)/(n-2)}$ ).

Tout d'abord:

$$w_i(2\xi_i - t, \theta) = w_i[(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2) + (\log \eta_i + 2)],$$

par définition de  $w_i$  et pour  $\xi_i \leq t$ :

$$w_i(2\xi_i - t, \theta) = e^{[(n-2)(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2)]/2} e^{n-2} v_i[\theta e^2 e^{(\xi_i - t) + (\xi_i - \log \eta_i - 2)}] \leq 2^{(n-2)/2} e^{n-2} = \bar{c}.$$

On sait que

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) = [\bar{V}_i^{\xi_i} (w_i^{\xi_i})^{N-1} - \bar{V}_i w_i^{N-1}] + [e^{t^{\xi_i}} \bar{W}_i^{\xi_i} (w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} - e^t \bar{W}_i w_i^{n/(n-2)}],$$

Les deux termes du second membre, notés  $Z_1$  et  $Z_2$ , peuvent s'écrire:

$$Z_1 = (\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i)(w_i^{\xi_i})^{N-1} + \bar{V}_i[(w_i^{\xi_i})^{N-1} - w_i^{N-1}],$$

et

$$Z_2 = (\bar{W}_i^{\xi_i} - \bar{W}_i)(w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} e^{t^{\xi_i}} + e^{t^{\xi_i}} \bar{W}_i[(w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} - w_i^{n/(n-2)}] + \bar{W}_i w_i^{n/(n-2)} (e^{t^{\xi_i}} - e^t).$$

D'autre part, comme dans la démonstration du Théorème 2 dans [B]:

$$w_i^{\xi_i} \leq w_i \text{ et } w_i^{\xi_i}(t, \theta) \leq \bar{c} \text{ pour tout } (t, \theta) \in [\xi_i, \log 2] \times \mathbb{S}_{n-1},$$

où  $\bar{c}$  est une constante positive indépendante de  $i$  de  $w_i^{\xi_i}$  pour  $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$ ;

$$|\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i| \leq A_i(e^t - e^{t^{\xi_i}}) \text{ et } |\bar{W}_i^{\xi_i} - \bar{W}_i| \leq B_i(e^t - e^{t^{\xi_i}}),$$

D'où

$$Z_1 \leq A_i (w_i^{\xi_i})^{N-1} (e^t - e^{t^{\xi_i}}) \text{ et } Z_2 \leq B_i ((w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} (e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c (w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} \times (e^{t^{\xi_i}} - e^t)).$$

Ainsi,

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} [(A_i w_i^{\xi_i 2/(n-2)} + B_i) (e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c (e^{t^{\xi_i}} - e^t)].$$

Puisque  $w_i^{\xi_i} \leq \bar{c}$ , on obtient:

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} [(A_i \bar{c}^{2/(n-2)} + B_i) (e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c (e^{t^{\xi_i}} - e^t)]. \quad (1)$$

Déterminons le signe de  $\bar{Z} = [(A_i \bar{c}^{2/(n-2)} + B_i) (e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c (e^{t^{\xi_i}} - e^t)]$ .

L'inégalité (1) devient alors :

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^\alpha [-c + A_i \bar{c}^{2/(n-2)} + B_i] (e^t - e^{t^{\xi_i}}).$$

On sait que  $A_i \rightarrow 0$  et  $B_i \rightarrow 0$ . Pour  $t_0 < 0$ , assez petit, la quantité  $c - A_i \bar{c}^{2/(n-2)} - B_i$  devient positive et le résultat cherché est obtenu dans l'intervalle  $[\xi_i, t_0]$ .

Le fait de prendre l'intervalle  $[\xi_i, t_0]$  au lieu de  $[\xi_i, \log 2]$ , n'est pas gênant, au contraire, plus l'intervalle est petit plus l'infimum est grand. La suite de la démonstration est identique à celle de la fin du Théorème 1.

On pourrait croire que  $t_0$  dépend de  $\xi_i$  ou de  $w_i^{\xi_i}$ , mais  $t_0$  dépend seulement de  $\bar{c}$ , une constante qui ne dépend que de  $n$ ,  $a$  et  $b$ .

On calcule  $t_0$  puis on introduit  $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$  comme dans les autres théorèmes, et on vérifie l'inégalité  $L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$ , dès que  $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$  sur  $[\xi_i, t_0]$ .

Ayant déterminé  $t_0 < 0$  tel que  $c - A_i \bar{c}^{N-1-\alpha} - B_i$  soit positive, on pose:

$$\xi_i = \sup\{\mu_i \leq \log \eta_i + 2, w_i^{\mu_i}(t, \theta) - w_i(t, \theta) \leq 0, \forall (t, \theta) \in [\mu_i, t_0] \times \mathbb{S}_{n-1}\}.$$

Par définition de  $\xi_i$ ,  $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$ . Ensuite, on vérifie que  $-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$ .

Comme dans le Théorème 1 dans [B], le principe du maximum, entraîne:

$$\min_{\theta \in \mathbb{S}_{n-1}} w_i(t_0, \theta) \leq \max_{\theta \in \mathbb{S}_{n-1}} w_i(2\xi_i - t_0).$$

Or,

$$w_i(t_0, \theta) = e^{t_0} u_i(a_i + e^{t_0} \theta) \geq e^{t_0} \min u_i \text{ et } w_i(2\xi_i - t_0) \leq \frac{c_0}{u_i(a_i)},$$

donc:

$$u_i(a_i) \times \min u_i \leq c.$$

Ce qui contredit la proposition.

## **Preuve du Théorème 2**

Les étapes sont identiques à celles de la preuve du théorème 1. Il y a quelques modifications dans la partie "Coordonnées polaires et méthode moving-plane". La proposition de la preuve du théorème 1 se conserve. Notons que la technique blow-up se simplifie car  $u_i$  est décroissante et son maximum est atteint en 0.

### **Coordonnées polaires** (Méthode "Moving-plane")

Posons pour  $t \in ]-\infty, \log 2]$  et  $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$ :

$$w_i(t, \theta) = e^{(n-2)t/2} u_i(e^t), \quad \bar{V}_i(t, \theta) = V_i(e^t) \text{ et } \bar{W}_i(t, \theta) = W_i(e^t).$$

Par ailleurs, soit  $L$  l'opérateur  $L = \partial_{tt} - \frac{(n-2)^2}{4}$ .

La fonction  $w_i$  est solution de l'équation suivante:

$$-Lw_i = \bar{V}_i w_i^{N-1} + e^{2t} \bar{W}_i w_i.$$

On pose pour  $\lambda \leq 0$ :

$$t^\lambda = 2\lambda - t, \quad w_i^\lambda(t, \theta) = w_i(t^\lambda), \quad \bar{V}_i^\lambda(t, \theta) = \bar{V}_i(t^\lambda) \text{ et } \bar{W}_i^\lambda(t, \theta) = \bar{W}_i(t^\lambda).$$

Alors, pour pouvoir vérifier si le Lemme 2 du Théorème 1 dans [B] reste valable, il suffit de noter que la quantité  $-L(w_i^\lambda - w_i)$  est négative lorsque  $w_i^\lambda - w_i$  l'est. En fait, pour chaque indice  $i$ ,  $\lambda = \xi_i \leq \log \eta_i + 2$ , ( $\eta_i = [u_i(y_i)]^{(-2)/(n-2)}$ ).

Tout d'abord:

$$w_i(2\xi_i - t) = w_i[(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2) + (\log \eta_i + 2)],$$

par définition de  $w_i$  et pour  $\xi_i \leq t$ :

$$w_i(2\xi_i - t) = e^{[(n-2)(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2)]/2} e^{n-2} v_i [e^2 e^{(\xi_i - t) + (\xi_i - \log \eta_i - 2)}] \leq 2^{(n-2)/2} e^{n-2} = \bar{c}.$$

On sait que

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) = [\bar{V}_i^{\xi_i} (w_i^{\xi_i})^{N-1} - \bar{V}_i w_i^{N-1}] + [e^{2t\xi_i} \bar{W}_i^{\xi_i} (w_i^{\xi_i}) - e^{2t} \bar{W}_i w_i],$$

Les deux termes du second membre, notés  $Z_1$  et  $Z_2$ , peuvent s'écrire:

$$Z_1 = (\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i) (w_i^{\xi_i})^{N-1} + \bar{V}_i [(w_i^{\xi_i})^{N-1} - w_i^{N-1}],$$

et

$$Z_2 = [(e^{2t} \bar{W}_i)^{\xi_i} - (e^{2t} \bar{W}_i)] w_i^{\xi_i} + e^{2t} \bar{W}_i (w_i^{\xi_i} - w_i).$$

D'autre part, comme dans la démonstration du Théorème 2 dans [B]:

$$w_i^{\xi_i} \leq w_i \text{ et } w_i^{\xi_i}(t, \theta) \leq \bar{c} \text{ pour tout } (t, \theta) \in [\xi_i, \log 2] \times \mathbb{S}_{n-1},$$

où  $\bar{c}$  est une constante positive indépendante de  $i$  de  $w_i^{\xi_i}$  pour  $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$ ;

$$|\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i| \leq A_i (e^{2t} - e^{2t\xi_i}) \text{ et } |(e^{2t} \bar{W}_i)^{\xi_i} - (e^{2t} \bar{W}_i) - W_i(0)(e^{2t\xi_i} - e^{2t})| \leq \tilde{B}_i (e^{2t} - e^{2t\xi_i}),$$

avec,  $\tilde{B}_i \rightarrow 0$ . D'où

$$Z_1 \leq A_i (w_i^{\xi_i})^{N-1} (e^{2t} - e^{2t\xi_i}) \text{ et } Z_2 \leq \tilde{B}_i (w_i^{\xi_i}) (e^{2t} - e^{2t\xi_i}) + c (w_i^{\xi_i}) \times (e^{2t\xi_i} - e^{2t}).$$

Ainsi,

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq w_i^{\xi_i} [(A_i (w_i^{\xi_i})^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i) (e^{2t} - e^{2t\xi_i}) + c (e^{2t\xi_i} - e^{2t})].$$

Puisque  $w_i^{\xi_i} \leq \bar{c}$ , on obtient:

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq w_i^{\xi_i} [(A_i \bar{c}^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i) (e^{2t} - e^{2t\xi_i}) + c (e^{2t\xi_i} - e^{2t})]. \quad (1)$$

$$\text{Déterminons le signe de } \bar{Z} = [(A_i \bar{c}^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i) (e^{2t} - e^{2t\xi_i}) + c (e^{2t\xi_i} - e^{2t})].$$

L'inégalité (1) devient alors :

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq w_i^{\xi_i} [-c + A_i \bar{c}^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i] (e^{2t} - e^{2t\xi_i}).$$

On sait que  $A_i \rightarrow 0$  et  $\tilde{B}_i \rightarrow 0$ . Pour  $t_0 < 0$ , assez petit, la quantité  $c - A_i \bar{c}^{4/(n-2)} - \tilde{B}_i$  devient positive et le résultat cherché est obtenu dans l'intervalle  $[\xi_i, t_0]$ .

Le fait de prendre l'intervalle  $[\xi_i, t_0]$  au lieu de  $[\xi_i, \log 2]$ , n'est pas gênant, au contraire, plus l'intervalle est petit plus l'infimum est grand. La suite de la démonstration est identique à celle de la fin du Théorème 1.

On pourrait croire que  $t_0$  dépend de  $\xi_i$  ou de  $w_i^{\xi_i}$ , mais  $t_0$  dépend seulement de  $\bar{c}$ , une constante qui ne dépend que de  $n$ ,  $a$  et  $b$ .

On calcule  $t_0$  puis on introduit  $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$  comme dans les autres théorèmes, et on vérifie l'inégalité  $L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$ , dès que  $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$  sur  $[\xi_i, t_0]$ .

Ayant déterminé  $t_0 < 0$  tel que  $c - A_i \bar{c}^{4/(n-2)} - \tilde{B}_i$  soit positive, on pose:

$$\xi_i = \sup\{\mu_i \leq \log \eta_i + 2, w_i^{\mu_i}(t) - w_i(t) \leq 0, \forall t \in [\mu_i, t_0]\}.$$

Par définition de  $\xi_i$ ,  $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$ . Ensuite, on vérifie que  $-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$ .

Comme dans le Théorème 1 dans [B], le principe du maximum, entraîne:

$$w_i(t_0) \leq w_i(2\xi_i - t_0),$$

comme  $u_i$  est décroissante, on obtient:

$$u_i(a_i) \times u_i(1) \leq c.$$

### **Références:**

- [A] T. Aubin. Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag 1998.
- [B] S.S Bahoura. Majorations du type  $\sup u \times \inf u \leq c$  pour l'équation de la courbure scalaire prescrite sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ . J.Math.Pures Appl.(9) 83 (2004), no.9, 1109-1150.
- [C-G-S] Caffarelli L, Gidas B., Spruck J. Asymptotic symmetry and local behavior of semi-linear elliptic equations with critical Sobolev growth. Commun. Pure Appl. Math. 37 (1984) 369-402.
- [C-L 1] C.C. Chen, C-S. Lin. Prescribing scalar curvature on  $\mathbb{S}_n$ . I. A priori estimates. J. Differential Geom. 57 (2001), no. 1, 67–171.
- [C-L 2] Chen C-C. and Lin C-S. Blowing up with infinite energy of conformal metrics on  $\mathbb{S}_n$ . Comm. Partial Differ Equations. 24 (5,6) (1999) 785-799.
- [G-N-N] B. Gidas, W. Ni, L. Nirenberg, Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle, Comm. Math. Phys., vol 68, 1979, pp. 209-243.
- [L1] Y.Y Li. Prescribing Scalar Curvature on  $\mathbb{S}_n$  and related Problems. I. J. Differential Equations 120 (1995), no. 2, 319-410.
- [L2] Y.Y Li. Prescribing Scalar Curvature on  $\mathbb{S}_n$  and related Problems. II. Comm. Pure. Appl. Math. 49(1996), no.6, 541-597.

6, RUE FERDINAND FLOCON, 75018 PARIS, FRANCE.

E-mail address: samybahoura@yahoo.fr, bahoura@ccr.jussieu.fr